**CHUYÊN ĐỀ 1: BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ**

**A. Một số kiến thức cần nhớ**

**1. Bẩy hằng đẳng thức đáng nhớ**



**\* Các hằng đẳng thức cần nhớ:**



(A + B + C)3 = A3 + B3 + C3 + 3(A + B)(B + C)(C + A)

A3 + B3 + C3 = 3ABC + (A+ B+C)(A2 + B2 + C2 – AB – BC - CA)

Nếu A + B + C = 0 thì A3 + B3 + C3 = 3ABC

**2. Một số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử**

***- Phương pháp đặt nhân tử chung***

***- Phương pháp Dùng hằng đẳng thức***

***- Phương pháp Nhóm hạng tử***

***- Phương pháp Tách hạng tử thành nhiều hạng tử***

***- Phương pháp thêm, bớt cùng một hạng tử***

***Ví dụ:*** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1. 4x4 + 81 b) x7+ x2 +1

**Giải:**

a) 4x4 + 81 ( xác định không dùng được phương pháp nào trong các phương pháp thông thường)

= 4x4 + 36x2 + 81 -36x2 ( xác định thêm vào hạng tử 36x2 và bớt đi 36x2 để khi sử dụng phương pháp nhóm hạng tử thì xuất hiện hằng đẳng thức)

= (2x2 + 9)2-(6x)2  (Xác định hằng đẳng thức)

= (2x2-6x+9)(2x2+6x+9) (Viết hằng đẳng thức đó)

b) Thêm bớt cùng 1 hàng tử làm xuất hiện nhân tử chung.

x7+x2+1 = x7-x+x2+x+1 = x(x3-1)(x3+1)+(x2+x+1)

= (x2+x+1)

***- Phương pháp đổi biến:***

**Ví dụ:** Phân tích đa thức x(x+4)(x+6)(x+10)+ 128 thành nhân tử

Ta có: x(x + 4)(x + 6)(x + 10)+128 = (x2 + 10)(x2 + 10x + 24) + 128

Đặt x2 + 10x + 12 = y,

Đa thức đã cho có dạng: (y-12)(y + 12) + 128 = y2 -16 = (y- 4)(y + 4)

Vậy x(x+4)(x+6)(x+10) +128 = (x2+10x+12- 4)(x2+10x+12+4)

= (x2+10x+8)(x2+10x+16)=(x2+10x+8)(x+2)(x+8)

***- Phương pháp hệ số bất định***

**Ví dụ**: Phân tích đa thức 2x3 - 5x2 + 8x - 3 thành nhân tử

Đa thức 2x3 - 5x2+8x -3 là 1 đa thức bậc 3 nên nếu có thể phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng (ax+b)(cx2+dx+e), với a;b;c;d; e là số nguyên; ac khác 0.

Ta có (ax+b)(cx2+dx+e) = acx3+(ad+bc)x2 +(ac+bd)x+be

Đồng nhất hệ số của đa thức này với đa thức đã cho, ta có:



Giả sử rằng a > 0 thì a = 2 hoặc a = 1

Với a = 2 thì c = 1, ta được 

Vì be = -3 nên b có thể =  hoặc .

Với b = -1 thì e = 3; d = -2

Vậy a = 2; b = -1; c = 1;d = -2; e = 3 thoả mãn các điều kiện trên.

Do đó, 2x3 – 5x2+8x -3 = (2x-1)(x2- 2x+ 3).

*-* ***Phương pháp xét giá trị riêng:***

**Ví dụ**: Phân tích đa thức A = ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) thành nhân tử.

***Hướng dẫn giải:***

Nếu thay a bởi b thì ta có: A = 0 + bc(b-c) + cb(c-b) = 0

Như vậy đa thức A chia hết cho (a-b)

Do vai trò của a,b, c như nhau trong đa thức A nên đa thức A chia hết cho (b-c); (c-a) tức là chia hết cho tích (a-b)(b-c)(c-a)

Vì 2 đa thức A và (a-b)(b-c)(c-a) đều là bậc 3 đối với tập hợp các biến nên thương của phép chia A cho (a-b)(b-c)(c-a) là 1 hằng số khác không , tức là

ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = k.(a-b)(b-c)(c-a)

Ta cho các biến nhận giá trị riêng cụ thể, chẳng hạn: a = 2,b = 1,c = 0 thì ta được

2.1.1+0+0 = k.1.1.(-2) nên k = -1

Vậy A = -(a-b)(b-c)(c-a) hay A = (a-b)(b-c)(a-c)

***- Phương pháp tìm nghiệm của đa thức (thường áp dụng đối với đa thức một biến)***

**Chú ý**: Đa thức f(x) có nghiệm x = a thì f(x) chia hết cho (x - a); tức f(x) = (x - a). g(x)

**Ví dụ**: Phân tích đa thức thành nhân tử: f(x) = x3 -x2 – 4

***Hướng dẫn giải:***

Ta thấy f (2) = 0 => f(x) nhận x = 2 là nghiệm => f(x) chia hết cho (x - 2) => f(x) có một nhân tử là (x – 2) => ta cần tách và nhóm các hạng tử làm sao xuất hiện (x - 2)

Ta tách như sau:

Cách 1 : x3-x2- 4 = x3-2x2 +x2 - 4 = x2(x-2)+(x-2)(x+2)

= (x- 2)(x2 + x +2)

Cách 2: x3-x2- 4 = x3 -8- x2 +4 = (x-2)(x2+2x + 4)-(x-2)(x+2)

= (x-2)(x2+2x+4-x-2) = (x-2)(x2+x+2)

**Nhận xét**: Ta có thể tìm được nhân tử (x2 + x + 2) bằng cách thực hiện phép chia đa thức (x3-x2- 4) cho đa thức (x - 2)

**3. Các bước rút gọn một phân thức đại số**

- Bước 1: Phân tích cả tử và mẫu của phân thức thành nhân tử

- Bước 2: Chia cả tử và mẫu của phân thức cho nhân tử chung

**4. Các phép toán đối với phân thức đại số**

***- Phép cộng hai phân thức:***

+ Cộng hai phân thức cùng mẫu: Ta cộng các tử mẫu với nhau và giữ nguyên mẫu thức



+ Cộng hai phân thức không cùng mẫu: Ta quy đồng mẫu các phân thức rồi thực hiện phép cộng các phân thức cùng mẫu thu được

***- Phép trừ hai phân thức***: 

***- Phép nhân hai phân thức***: Ta nhân tử thức với tử thức và nhân mẫu thức với mẫu thức



***- Phép chia hai phân thức***: 

**Chú ý**: Ta cần rút gọn phân số kết quả đến phân số tối giản

**B. Một số dạng bài tập**

**Bài 1**: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) x2 – 5x + 6 b) 2x2 – x – 10 c) x3 – x2 – 5x + 6

d) 3x3 – x2 – 12x + 4 e) x4 + 2019x2 + 2018x + 2019 f) x4 - 6x2 - 7x - 6

**Bài 2**

1. Phân tích đa thức (a - b)3 + (b - c)3 + (c - a)3 thành nhân tử

2. Tìm x, biết:

a) (x - 3)3 + (2x - 5)3 + (8 – 3x)3 = 0

b) (1- 2x)3 + (3x - 5)3 = (x - 4)3

**Bài 3:** Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1.

Chứng minh A = (a2 + 1)(b2 + 1)(c2 + 1) là bình phương của một số hữu tỉ.

**Bài 4:** Chứng minh (x + y)(x + 2y)(x + 3y)(x + 4y) + y4 là một số chính phương với x và yN

**Bài 5:** Cho ba số a, b, c khác 0 v à ab + bc + ac = 0. Tính giá trị của biểu thức:

A=

**Bài 6**: Cho x < y < 0 và  . Tính giá trị của biểu thức 

**Bài 7**: Cho ba sè a, b, c ®«i mét kh¸c tháa m·n 

Chøng minh r»ng 

**Bài 8**: Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: a3 + b3 + a2b + b2c – abc = 0.

Tính giá trị biểu thức P = a + b + c?

**Bài 9**: Cho x =  và y = . Tính giá trị biểu thức: A = xy + x + y + 1 theo a và b.

**Bài 10:**

a) Chứng minh a3 – a chia hết cho 6 với mọi số nguyên a

b) Cho các số nguyên thỏa mãn a + b + c = 32018. Chứng minh a3 + b3 + c3 chia hết cho 3.

**Bài 11:**

a) Chứng minh rằng: a5 – a chia hết cho 5 với mọi số nguyên a.

b) Cho các số nguyên thỏa mãn a + b + c = 0. Chứng minh a5 + b5 + c5 chia hết cho 30.

**Bài 12**: Cho các số thực x; y; z khác 0 thỏa mãn: x3 + y3 + z3 = 1 và

Tính giá trị biểu thức: P = 

**Bài 13**: Cho x, y, z là các số khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn  .

Chứng minh: 

**Bài 14:** Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn a3 + b3 + c3 = 3abc và a + b + c  0.

Tính giá trị của biểu thức 

**Bài 15:** Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn: xyz = 2 và 2 + x + xy  0.

Tính giá trị biểu thức: 

**Bài 16:** Rút gọn các biểu thức:

1) A =  với x  2; x  -2

2) B =  với a  3; a  -3.

3) C =  với x ≠ 2; x ≠ 3.

4)  với .

4) với 

6) F =  với x  0; x  -1; x  2.

7) G =  với a  -1, a ≠ 1.

8) H = Với x  0; x  1’ x  -1

9) I =  với x ≠ 2; x ≠ 1; x  -1

10)  với x  0

**Bài 17**: Tìm x nguyên để giá trị của các biểu thức sau nguyên

a) A =  b) B =  c) 

**Bài 18:** Cho biểu thức 

a) Rút gọn M b) Tìm giá trị nhỏ nhất của M